

NT I Zusammenfassung

• Diskrete stochast. Quelle: wählt aus Zeichenvorrat X_0 Zeichen x_i mit Wahrscheinlichkeit P_i ($\sum_{i=1}^N P_i = 1$)

• Wenn x_1, x_2 statistisch unabhängig: $P[x_1, x_2] = P_1 \cdot P_2$

• Informationsgehalt: $I(x_i) = \log_2 \frac{1}{P_i}$; Maßseinheit: $b = 10$: dezit/Zeichen
 $= e$: nat/Zeichen
 $= 2$: bit/Zeichen

• Mittlerer Informationsgehalt d. Quelle: $H(X) = \sum_{i=1}^N P_i \log_2 \frac{1}{P_i}$ (i) $0 \leq H(X) \leq \log_2 N$

(ii) $\max H(X) = \log_2 N$ für $P_i = \frac{1}{N}$

• Redundanz: $R(X) = \overbrace{H_0}^{H_0} - H(X)$ [$\frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}}$]

$r(X) = \frac{R(X)}{H_0} = 1 - \frac{H(X)}{H_0} = 1 - \epsilon$... relative Redundanz mit ϵ = relative Effizienz d. Quelle

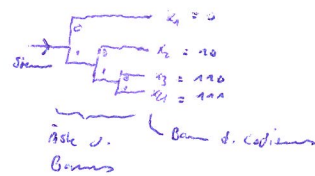
• redundanzfreie Signale sind stör anfällig \rightarrow Schutzbits (nennt man Kanalcodierung; Redundanzcodierung = Quellcodierung)

• Digitale Übertragung:

• $x_i \mapsto w_i$ (bestehend aus m_i Binärstellen) $i=1 \dots N$

• mittlere Codewortlänge $\bar{m} = \sum_{i=1}^N m_i P_i$ (soll minimal sein)

• Konstruktion präfixfreier CW: (i) mittels Codebaum/Graph:

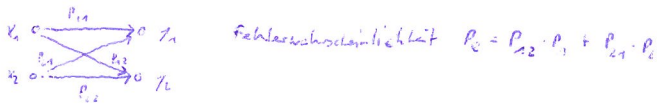


Decodierung durchläuft d. Baum von Strom beginnend

(ii) Huffman-Code:

1. Ordne N Zeichen nach fallender P_i
2. Bilde aus letzten beiden Zeichen neues Zeichen mit Summe d. P_i
3. Wiederhole 1. & 2. bis 1 Zeichen übrig bleibt
4. Ordne d. Knoten d. Baumes 0 und 1 zu

• Zeichenübertragung:



• Physikal. Darstellung:

Zeichen \rightarrow Impuls \rightarrow Zuordnung

Symbolrate $V_s = \frac{1}{T}$ [$\frac{\text{Symbol}}{s} = \text{Baud}$]

Mittl. Informationsfluss: $H^* = H(X) \cdot V_s$ [$\frac{\text{bit}}{s}$]

Bitrate: $V_b = \max H^* = \frac{1}{T} \max(H(X)) = V_s \cdot \log_2 N$

$V_b = \frac{1}{T_b} [\frac{\text{bit}}{s}]$ $\Rightarrow T = T_b \log_2 N$
 Bitdauer

• Signale:

Dirac-Impuls: Def.: (i) Diracdeltafunktion: $\int_{-\infty}^{\infty} S(f) \phi(f) df = \phi(0)$

(ii) $S(f) = 0 \forall f \neq 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} S(f) df = 1$

Signalenergie: $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$
 nach bin. phys. Fkt.

Funktorraum: $\langle g_m, g_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g_m(t) \bar{g}_n(t) dt = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$

(Signalraum heißt vollständig, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 0$)
 quadr. Fehler

• Fourier-Reihe:

Def.: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{j n \omega_0 t} = \tilde{x}(f)$ mit $d_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j n \omega_0 t} dt$ und $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Parseval'sche Formel: $\int_0^T |x(t)|^2 dt = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n|^2$

Hinreichende Bed. für Existenz: $|d_n|$ muss endlich sein

$\int_0^T |x(t)|^2 dt \leq M, M \in \mathbb{R}$

• Energiesignal:

Signal mit endl. und von Null versch. Enge $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ heißt Energiesignal

Mittlere Signalleistung:

$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$, bei period. Signal: $P_x = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$

Leistungssignal (wenn $0 < P_x < \infty$) besitzt F-Reihe

Reelle F-Reihe: $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n \omega_0 t) dt$

$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n \omega_0 t) dt$

$\Rightarrow x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n \omega_0 t)$

Fourier-Transformation: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$... Rück-Transform
 $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$... F-Transform $[V_s = \frac{1}{H_s}]$

Zeitdiskrete Signale: Ziel: analoges Signal wird abgetastet und CW zugeordnet (PAM-Signal)

Idealer Abtaster: $x(t) \xrightarrow{d(t)} x_d(t)$ $d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$
 $x_d(t) = x(t) \cdot d(t) = k \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(t - kT)$

Betrachtung im Frequenzbereich führt zum Ziel:

geg.: $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ ges.: $x_d(t) \leftrightarrow X_d(\omega)$

Lsg.: $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$

$d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \leftrightarrow D(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$

$\Rightarrow X_d(\omega) = k \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$ ($X_d(\omega) = X_d(\omega + \omega_s)$... periodisch mit ω_s)

Teilspektren überlagern sich nicht, wenn $\omega_s > 2\omega_m$... Abtast-Theorem
 (and somit kein Aliasing mit TP sichtbar werden)

Bandbegrenzung
 von $X(\omega)$

Modulation cosinusförmiger

Träger:

Ziel: Spektrum $X(\omega)$ d. Nutzsignals in einen neuen Frequenzbereich verschieben.

$v(t) = \underbrace{A_0}_{\text{modul. Amplitude}} \cdot \underbrace{\cos(\omega_s t + \varphi_0)}_{\text{Träger}} \cdot \underbrace{\underbrace{\varphi(t)}_{\text{Nutzsignal}}}_{\text{Modulphase}}$
 $\omega_s = 2\pi f_s$

AM: $\omega_s = \text{const.}$; $\varphi_0 = \text{const.}$
 $\varphi(t) = \alpha_m x(t)$ (Nutzsignal)
 α_m ... Modulierungskonstante

$\Rightarrow v(t) = A_0 x(t) \cdot \cos(\omega_s t + \varphi_0) = \text{Re} \left\{ \underbrace{A_0 x(t)}_{\text{komplexe Hüllkurve bei AM}} \cdot \underbrace{e^{j(\omega_s t + \varphi_0)}}_{\text{komplexe Träger-Schwingung}} \right\}$

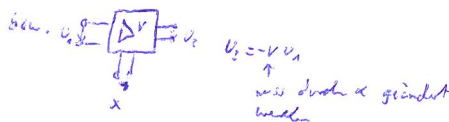
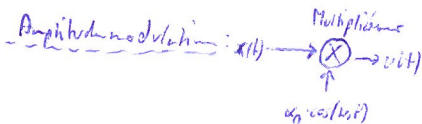
FM: $\varphi = \text{const.}$
 $\omega_s = \text{const.}(\cdot)$

$\varphi_0 = \varphi_0(t)$

Def.: $\varphi(t) = \omega_s t + \varphi_0(t)$... Modulphase
 $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_s + \frac{d\varphi_0}{dt} = \omega_s + \alpha_f x(t)$

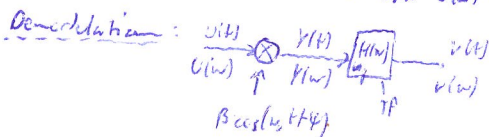
$\Rightarrow d\varphi = \omega dt = (\omega_s + \alpha_f x(t)) dt \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi = \int_{t_0}^t (\omega_s + \alpha_f x(\tau)) d\tau$

$\varphi(t) = \omega_s t + \int_{t_0}^t \alpha_f x(\tau) d\tau$
 $\Rightarrow v(t) = A_0 \cos(\omega_s t + \int_{t_0}^t \alpha_f x(\tau) d\tau)$... nicht-linear
 $= \text{Re} \left\{ \underbrace{A_0 e^{j\omega_s t}}_{U_{\text{FM}}(t)} \cdot \underbrace{e^{j\int_{t_0}^t \alpha_f x(\tau) d\tau}}_{\text{komplexe Träger-Schwingung}} \right\}$



Spektrum von $v(t)$: $v(t) = \frac{\alpha_m}{2} (x(t) e^{j\omega_s t} + x(t) e^{-j\omega_s t}) \Rightarrow V(\omega) = \frac{\alpha_m}{2} (X(\omega - \omega_s) + X(\omega + \omega_s))$

Spektralkante im $V(\omega)$ dürfen sich nicht überlagern $\Rightarrow \omega_s > \omega_g$



Demodulations-Trägerschwingung besitzt exakt gleiche Kreisfrequenz ω_s wie bei Modulation

$\hookrightarrow y(t) = v(t) \cdot \beta \cos(\omega_s t + \varphi) = \frac{\beta}{2} (e^{j\varphi} e^{j\omega_s t} + e^{-j\varphi} e^{-j\omega_s t}) \Rightarrow Y(\omega) = \frac{\beta}{2} (e^{j\varphi} V(\omega - \omega_s) + e^{-j\varphi} V(\omega + \omega_s))$

$\hookrightarrow y(t) = \frac{\alpha_m \beta}{2} \cos(\varphi) x(t) + \underbrace{\frac{\alpha_m \beta}{4} (e^{j\varphi} X(\omega - 2\omega_s) + e^{-j\varphi} X(\omega + 2\omega_s))}_{\text{nicht von } H(\omega) \text{ gefiltert}}$

$\forall \omega \in \mathbb{R} : \omega \neq \pm \omega_s + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Frequenzmodulation

- Berechnung von $U(\omega)$ für $x(t)$ beliebig ist schwierig
- wichtiger Sonderfall: $x(t) = \hat{x} \cos(\omega_m t)$

$$\varphi(t) = \omega_c t + \omega_F \int x(\theta) d\theta = \omega_c t + \underbrace{\frac{\omega_F \cdot \hat{x}}{\omega_m}}_{\eta} \sin(\omega_m t)$$

$\eta = \dots$ Modulationsindex $\omega_F \cdot \hat{x} = \Delta \omega$... Kreisfrequenzhub

$$\begin{aligned} \hookrightarrow u(t) &= \hat{u} \cos(\omega_c t + \eta \sin(\omega_m t)) \\ &= \hat{u} \underbrace{e^{j\eta \sin(\omega_m t)}}_{\text{komplexe Hüllkurve}} \underbrace{e^{j\omega_c t}}_{\text{komplexe Trägerfrequenz}} \end{aligned}$$

Spektrum: $e^{j\eta \sin(\omega_m t)} \stackrel{!}{=} y(t)$ - periodisch mit Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega_m}$

$$\hookrightarrow \text{Fourier: } d_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{j\eta \sin(\omega_m t)} e^{-jn\omega_m t} dt = \underbrace{y_n(\eta)}_{\text{Bessel fkt.}}$$

$$\Rightarrow u(t) \stackrel{\text{Re}}{=} \hat{u} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n(\eta) e^{jn\omega_m t + j\omega_c t}$$

$$= \hat{u} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n(\eta) \cos[(\omega_c + n\omega_m)t]$$

$$u(t) \Leftrightarrow U(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi \hat{u} y_n(\eta) \cdot [S(\omega - \omega_c - n\omega_m) + S(\omega + \omega_c + n\omega_m)]$$

Eig. von $y_n(\eta)$:

$$\eta \in \mathbb{R} \Rightarrow y \in \mathbb{R}$$

$$y_n(\eta) = (-1)^n \cdot y_n(\eta)$$

Signalübertragung mit elektr. Leitungen

Ggl. der homogenen elektr. Leitung:

Taylor: $\begin{aligned} u(x+dx, t) &= u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx + \mathcal{O}(dx)^2 \\ i(x+dx, t) &= i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx + \mathcal{O}(dx)^2 \end{aligned}$

Maxwell: $u(x, t) = i(x, t) \cdot R + L \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + u(x, t)$

$$\hookrightarrow R' \cdot i(x, t) + L' \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

Kontinuität: $i(x, t) - i(x+dx, t) - dt \cdot \frac{\partial}{\partial t} (u(x+dx, t) - u(x, t)) = 0$

$$\hookrightarrow G' \cdot u(x, t) + C' \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial i(x, t)}{\partial x}$$

Dunkelheit, da:

- $R' \rightarrow G'$
- $L' \rightarrow C'$
- $i \rightarrow u$
- $u \rightarrow i$

$$\Rightarrow R' G' \cdot u(x, t) + (R' C' + G' L') \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + L' C' \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \dots \text{Telegraphen-Gleichung}$$

Formale $\Rightarrow y^2(p) \cdot u(x, p) - \frac{\partial^2 u(x, p)}{\partial x^2} = 0$ mit $y^2 = (R' + pL')(G' + pC')$

$$\hookrightarrow u(x, p) = \underbrace{U_A(p) e^{-\gamma(p) \cdot x}}_{\text{Vorwärtslauf}} + \underbrace{U_B(p) \cdot e^{\gamma(p) \cdot x}}_{\text{Rückwärtslauf}}$$

Teilwille $\hookrightarrow Z(x, p) = \frac{U_A(p)}{R' + pL'} \left(\frac{U_B(p)}{G' + pC'} \right) \Rightarrow Z_L = \frac{R' + pL'}{p} = \sqrt{\frac{R' + pL'}{G' + pC'}} \dots$ Wellenwiderstand

Übertragungsfkt. von Leitung: $F(x, \omega) = \frac{Z_L}{Z_A + Z_L} \frac{e^{-\gamma x} + \Gamma_2 e^{-\gamma(2L-x)}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma L}}$ mit $\Gamma_1 = \frac{Z_A - Z_L}{Z_A + Z_L} \dots$

bei $G(x, \omega) = \frac{I(x, \omega)}{U_0(\omega)/Z_L} = \frac{Z_L}{Z_A + Z_L} \frac{e^{-\gamma x} - \Gamma_2 e^{-\gamma(2L-x)}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-2\gamma L}}$

$\Gamma_2 = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} \dots$

